后　记

写作本书的目的是想通过对三角等式的证明方法,论论探索一下人们解题中的正确思路.用我们的语言归纳为:找差异,抓联系,促转化,求统一.本来我们还想将这种指导思想应用于三角不等式以及代数、几何各类问题的证明,读者将会发现,这样的思考方法,对于那些问题同样是有效的.而这样做,势必要增加这本书的篇幅,同时也将使此书的中心不够突出.因此,我们将这部分材料省略了,拟在另外的小丛书中加以阐述.

关于本书,还有几点要说明的.

(1)在等式证明中,分析法(即对结论进行变换、化简、达到一个明显的结论,而又如果变换的每一步是可逆的,则即可推知所求证的等式成立)以

及由定义出发的直接证明,都是十分重要的.而在本书中,对分析法提到得很少,对由定义出发的证明方法根本没有提到.所以这样做,也完全是为了使我们的书中心突出,这一点请读者务必加以注意.由定义出发的直接证明,在数学中,尤其在高等数学中,是十分重要的.同学们将来如果有机会到更高一级的学校去学习,就会体会到这点.例如,同角三角函数的8个基本公式的证明就是从6个三角函数的定义出发来验证的.

(2)在本书中,除了第3章的例1我们给出了多种证法外,一般的题目,我们只给出一种证明方法,这实在也是为了节省篇幅的缘故.正如第3章例1的证明所提供的那样,对每个题目着手解决时的出发点不一样,就会得到不同的解法.这就是我们通常提到的"一题多解"的说法.对于一个初学者来说,如果每个题目经常考虑一下多种解法,这无疑是有益的.所以,对本书中的每个例题,读者在读完书中所提供的证明之后,可试图从另外的出发点出发,考虑一下是否还有其他解法.我们想,这样做,收获一定会更大些.

(3)众所周知,对于数的集合,如果我们在其中引入了相等的关系,并记为"$=$",则这相等的关系必须具下列诸性质:自反性,$a=a$;对称性,若 $a=b$,则 $b=a$;传递性,若 $a=b$,$b=c$,则 $a=c$.同时,我们又都知道,两个函数相等的定义是这样叙述的:

定义 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的定义域 D,且对于任何 $x\in D$,$f(x)=g(x)$ 总成立,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等,并记为 $f=g$.

显然,根据这个定义,函数相等这个关系,同样具有自反性,对称性以及传递性.特别是传递性,这是我们进行函数等式证明的根本依据.

但是在不少的三角等式中,如果认真按照上述函

数相等的定义推敲,实际上,有不少等式是不成立的.例如第 3 章例 1 所提供证明的等式

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

令

$$f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x},g(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

则 $f(x)$ 的定义域

$$D_f=\{x\mid\cos x\neq 0\}=\left\{x\mid x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$$

而 $g(x)$ 的定义域为

$$D_g=\left\{x\mid\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}=$$

$$\left\{x\mid x\neq 2n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$$

显然,$D_f\neq D_g$,$D_f\subset D_g$.尽管对于每个 $x\in D_f$,$f(x)=g(x)$ 已经可以证明是成立的.但按照函数相等的概念,我们是不能获得函数等式

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

成立的结论.不过,本书讨论的对象主要是思想方法,而许多类似于第 3 章例 1 的等式,在中学课本上又屡见不鲜.所以我们也就“放宽政策”地默认了.其实上例所提供的等式,只是在 D_f 与 D_g 的交集 $D_f\cap D_g$ 上才成立的.由于 $D_f\subset D_g$,又在 D_f 上 $f(x)=g(x)$,在函数论中,一般称函数 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在 D_g 上的延拓,而称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 在 D_f 上的部分或限制.那么能不能对函数相等的定义进行如下修改呢?

定义　对于函数 $f(x)$ 与 $g(x)$,若对于任何 $x\in D_f\cap D_g$(D_f,D_g 分别是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域)总

有 $f(x)=g(x)$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等,并记为 $f=g$.

我们说,这样的修改的定义是不行的,因为按这样的定义,函数相等这个关系虽然还有自反性和对称性,但是传递性就不成立了.这样,我们的恒等变换就无法进行了.由此可见,修改后的函数相等的定义是不恰当的.

由于作者的水平十分有限,错误在所难免,望读者批评指正.

作　者

2015 年 1 月 1 日